1.7.10 Konstrukce trojúhelníků II (věta Ssu)

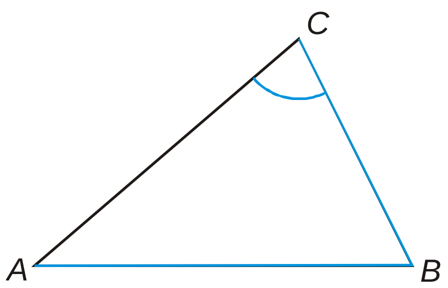
Předpoklady: 010709

Minulá hodina: Tři věty o shodnosti (odpovídají jednoznačným postupům pro konstrukci trojúhelníku):

- **Věta *sss*:** Shodují-li se dva trojúhelníky ve všech třech stranách, jsou shodné.
- **Věta *sus*:** Shodují-li se dva trojúhelníky ve dvou stranách a úhlu jimi sevřeném, jsou shodné.
- **Věta *usu*:** Shodují-li se dva trojúhelníky ve straně a přilehlých úhlech, jsou shodné.

Poslední zkoumanou možností, jak sestrojit trojúhelník, bylo zadání ve tvaru *ssu*.

Př. 1: Nakresli náčrtek zadání *ssu*. Jak se zadání *ssu* liší od *sus*? Modeluj pomocí brček a úhlu nakresleného na papíře trojúhelník zadaný větou *ssu* (využij úhel $45°$ a brčka o délkách 9 a 12 cm). Záleží na tom, které z brček představuje stranu naproti úhlu? Je trojúhelník zadán jednoznačně?



Dvě různé možnosti:

- pokud jsme proti úhlu $45°$ umísťovali delší stranu (brčko 12 cm), našli jsme pouze jeden trojúhelník $\Rightarrow$ zadání bylo jednoznačné,
- pokud jsme proti úhlu $45°$ umísťovali kratší stranu (brčko 9 cm), našli jsme pouze dva trojúhelníky $\Rightarrow$ zadání nebylo jednoznačné,

Trojúhelník je zadán jednoznačně, pokud proti úhlu umísťujeme delší stranu.

Zadání *ssu* je jednoznačné pouze v případě, že strana proti úhlu je delší než strana k úhlu přilehlá $\Rightarrow$ pokud chceme používat zadání *ssu* jako větu o shodnosti, musíme vědět, že strana proti úhlu je delší $\Rightarrow$ věta ***Ssu***.

Věta *Ssu*: Shodují-li se dva trojúhelníky ve dvou stranách a úhlu proti větší z nich, jsou shodné.

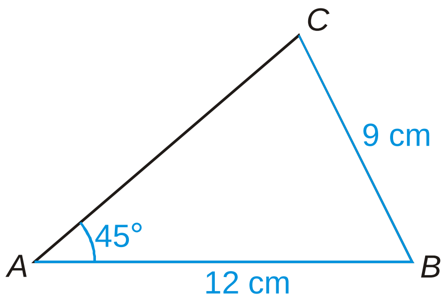
Další věty (například shodnost pomocí výšek, těžnic, ...) o shodnosti se neformulují.

Pedagogická poznámka: Následující dva příklady se od sebe liší pouze umístěním zadaných údajů. Příklad 2, který vychází z klasického postavení trojúhelníku v náčrtku, je pro slabší žáky daleko jasnější. Lepší část třídy naopak nemusí tímto příkladem ztrácet čas a může řešit rovnou příklad 3. Je však třeba dobře sledovat, aby každý stihnul narýsovat alespoň ten lehčí příklad (pokud si někdo není v příkladu 3 jistý ihned ho vracím na příklad 2).

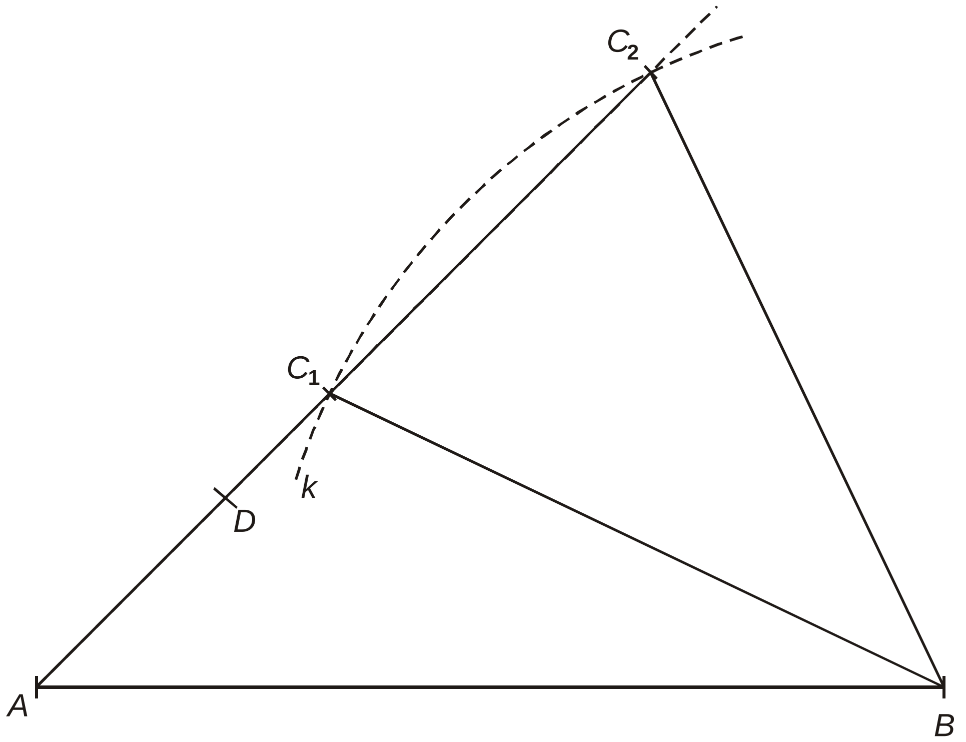
Pedagogická poznámka: Barevné vytahování je samozřejmě prohřešek proti správnému rýsování. Bohužel část žáků nemá příliš velkou kontrolu nad tím, co rýsují a jen vytažením je možné se přesvědčit, že vidí trojúhelník, který narýsovali.

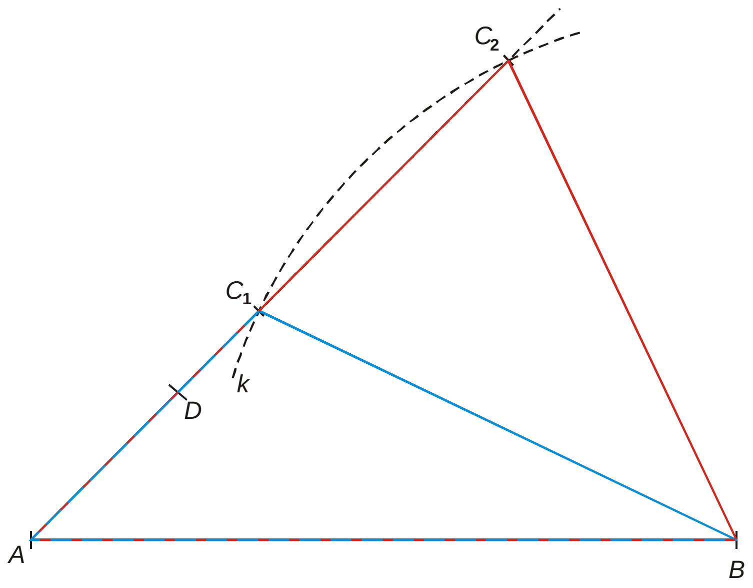
Př. 2: Narýsuj trojúhelník ABC: $a = 9\,\text{cm}$, $c = 12\,\text{cm}$, $\alpha = 45°$. Nejdříve nakresli náčrtek a rozhodni o postupu konstrukce. Výsledek zkontroluj pomocí brček. Pokud má příklad více řešení, vytáhni každý z trojúhelníků jinou barvou.

Náčrtek:



Návrh postupu:
1. strana c
2. úhel α
3. kružnice $k(B; a = 9\,\text{cm})$, kvůli straně b
4. průsečík kružnice s ramenem úhlu je bod C
5. trojúhelník ABC





1. úsečka *AB*, $|AB| = c = 12\,\text{cm}$
2. polopřímka *AD*, $|\sphericalangle BAD| = 45°$
3. kružnice $k(B; a = 9\,\text{cm})$
4. body C_1 a C_2 průsečíky kružnice *k* a polopřímky *AD*
5. trojúhelníky ABC_1 a ABC_2

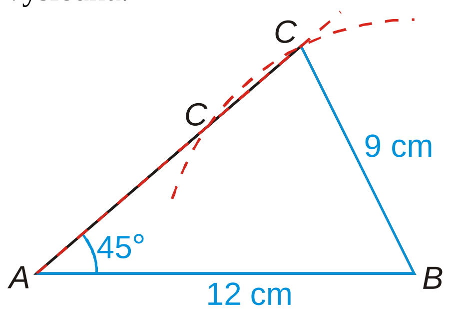
Pedagogická poznámka: Je třeba prohlédnout všechny obrázky a vychytat žáky, kteří nemají v sešitě žádný oblouk a bod *C* našli otáčením pravítka.

Pedagogická poznámka: Při kontrole řešení příkladu se bavíme o tom, jak je možné, že jsme první část hodiny strávili dumáním o jednoznačnosti řešení při konstrukci se stejným zadáním, které se v příkladu 2 má narýsovat, a přesto si většina žáků neodnesla do druhé části hodiny žádné poučení, které by zabránilo tomu, aby trojúhelník narýsovala pouze jeden.
Druhou věcí, která se hodí zmínit je role „nedotažených" čar. Pouze „větší“ trojúhelník často kreslí žáci s dlouhým ramenem úhlu a krátkým obloukem, pouze „menší“ pak Ti, kteří si rameno úhlu udělali krátké. Zabránit se tomu dá částečně tím, že kreslíme necelé čáry, ale snažíme se je vidět celé.

Při řešení předchozího příkladu jsme rýsovali dvě čáry, které nám umožnily najít vrchol *C*:

- rameno úhlu α, na kterém leží strana *b*,
- kružnici *k*, na které leží body vzdálené od vrcholu *B* 9 cm (délku strany *a*).

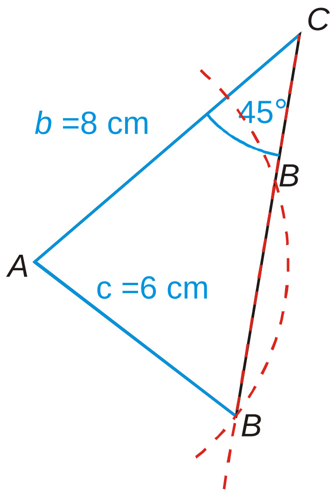
Tyto čáry je výhodné kreslit i do náčrtku na počátku příkladu, abychom měli lepší představu o výsledku.



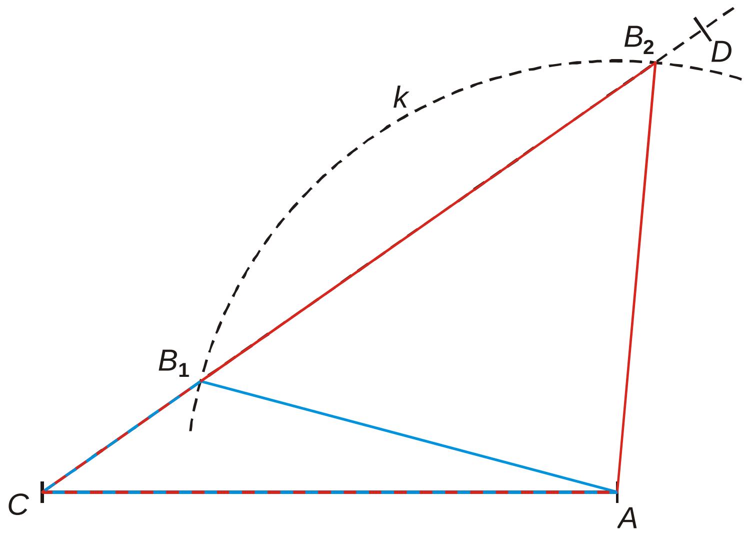
Př. 3: Narýsuj trojúhelník *ABC*: $b = 8\,\text{cm}$, $c = 6\,\text{cm}$, $\gamma = 35°$. Nejdříve nakresli náčrtek a rozhodni o postupu konstrukce.

Náčrtek:

Návrh postupu:
1. strana *b*



2. úhel γ
3. kružnice $k(A; c = 6\,\text{cm})$, kvůli straně c
4. průsečík kružnice s ramenem úhlu je bod B (pozor – budou dvě řešení)
5. trojúhelník ABC



1. úsečka AC, $|AC| = b = 8\,\text{cm}$
2. polopřímka CD, $|\sphericalangle ACD| = 35°$
3. kružnice $k(A; c = 6\,\text{cm})$
4. body B_1 a B_2 průsečíky kružnice k a polopřímky CD
5. trojúhelníky ACB_1 a ACB_2

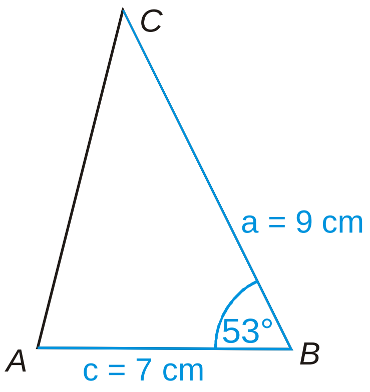
Pedagogická poznámka: Žákům, kteří si nakreslí náčrtek v klasické poloze (s vodorovnou stranou *AB*) a neví jak rýsovat, radím, aby si zkusili náčrtek otočit.

Př. 4: Ondra chce doma od rodičů vysvětlit příklad z písemky. Pamatuje si, že byl zadaný úhel $\beta = 53°$, dvě strany o délkách 7 a 9 cm a navíc pan učitel říkal, že zadání je jednoznačné. Najdi všechny možná zadání, která odpovídají tomu, co si Ondra z písemky pamatuje.

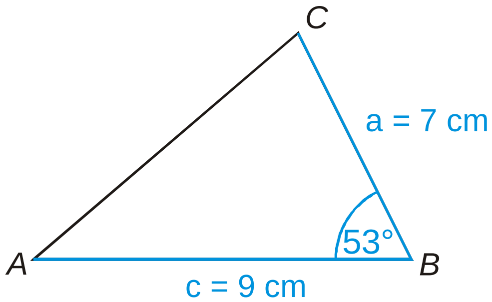
Trojúhelník byl zadán jednoznačně pomocí dvou stran a jednoho úhlu $\Rightarrow$ dvě věty o shodnosti:

- věta *sus* (dvě možnosti, jak přiřadit přilehlé strany k úhlu β):

- zadání: $c = 7\text{ cm}$, $\beta = 53°$, $a = 9\text{ cm}$,



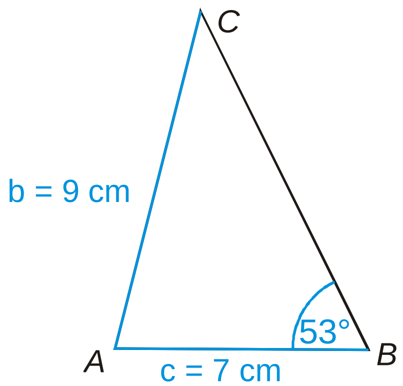
- zadání: $c = 9\text{ cm}$, $\beta = 53°$, $a = 7\text{ cm}$,



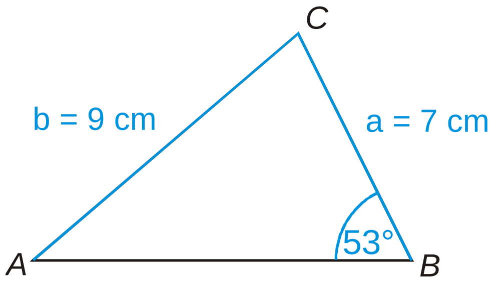
  (oba trojúhelníky mají stejný tvar, ale prohozené vrcholy *A* a *C*)

• věta *Ssu* (strana *b* protilehlá úhlu β musí mít délku 9 cm, dvě možnosti, které straně přiřadit délku 7 cm):

- zadání: $b = 9\text{ cm}$, $c = 7\text{ cm}$, $\beta = 53°$, ,



- zadání: $b = 9\text{ cm}$, $a = 7\text{ cm}$, $\beta = 53°$, ,

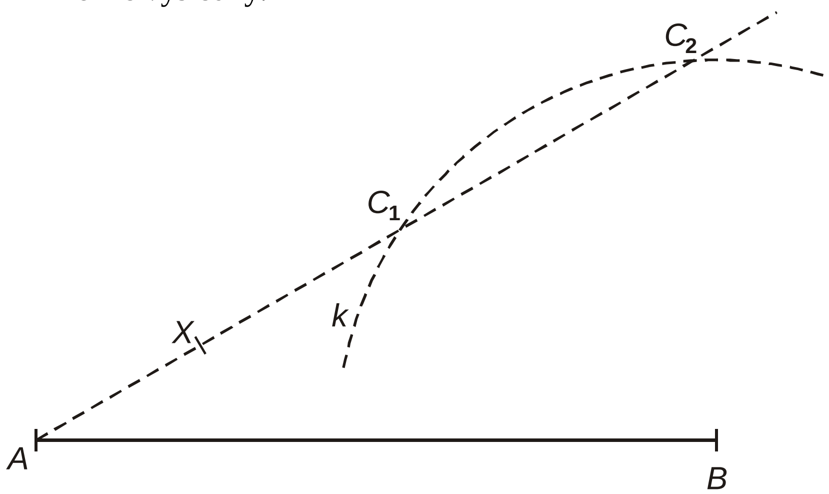


  (oba trojúhelníky mají stejný tvar, ale prohozené vrcholy *A* a *C*)

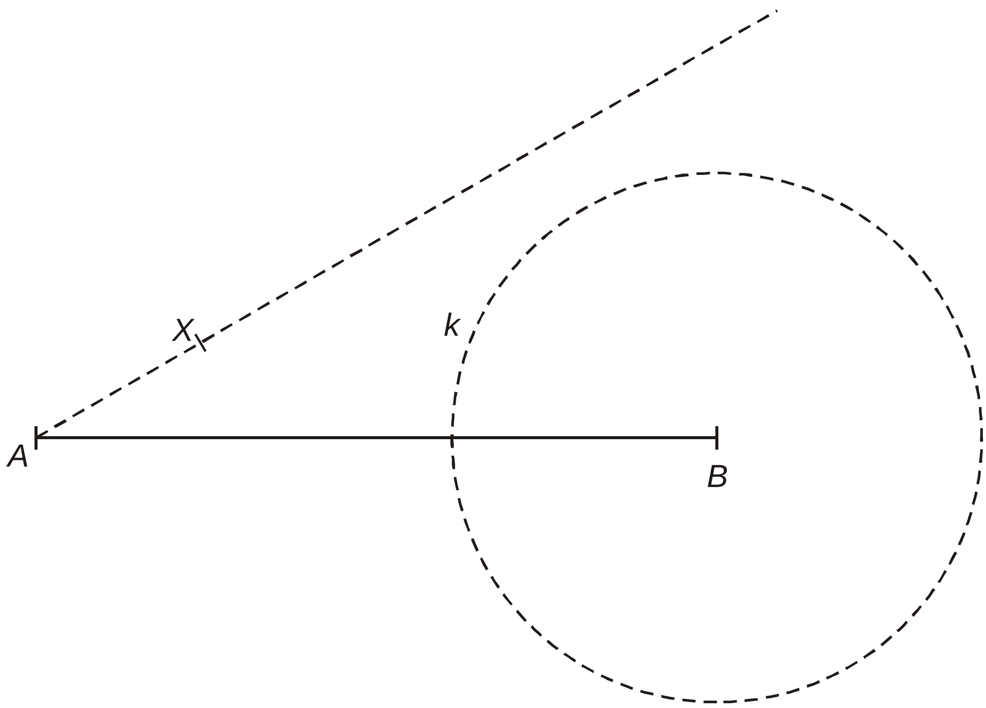
Př. 5: Janča s Ivčou diskutují o větě *Ssu*. Janča tvrdí, že pokud je v trojúhelníku *ABC* dána strana $c = 9\text{ cm}$ a úhel $\alpha = 40°$ bude pro všechny délky strany *a* menší než 9 cm zadání nejednoznačné a konstrukce bude mít dvě řešení. Má Janča pravdu? Může se stát, že konstrukce dopadne jinak? Pro jakou délku strany *a*?

Janča pravdu nemá.

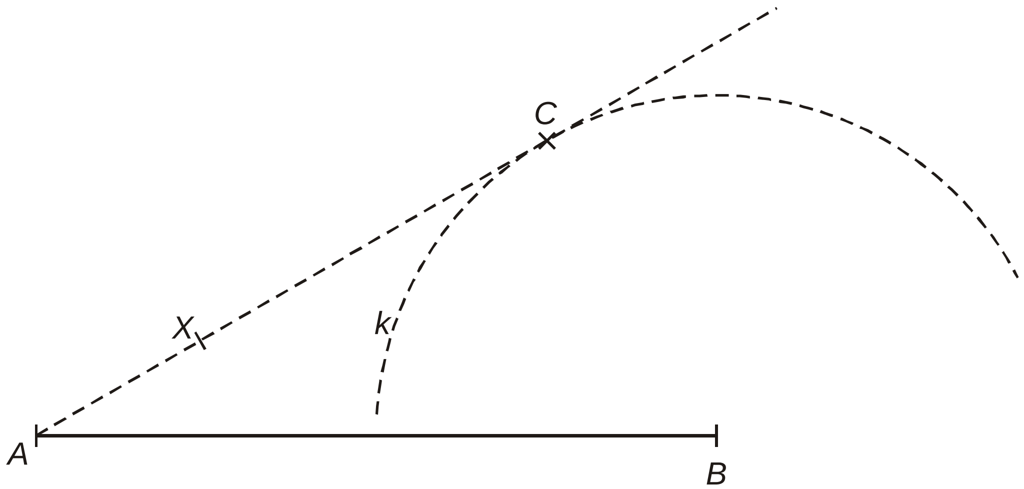
Narýsujeme si stranu *c* a úhel α a budeme rýsovat kružnice se středem v bodě *B* a poloměrem menším než 9 cm.
Tři možné výsledky.



Kružnice se protne s polopřímkou *AX* ve dvou bodech C_1 a C_2 $\Rightarrow$ získali bychom dvě řešení.



Kružnice se s polopřímkou *AX* vůbec neprotne $\Rightarrow$ nezískali bychom ani jedno řešení.



Kružnice *k* se s polopřímkou *AX* protne právě v jednom bodě $\Rightarrow$ získali bychom tak právě jedno řešení (pro naše zadání nastane tato situace při poloměru kružnice 4,5 cm.

Shrnutí: Některá zadání trojúhelníku mají více řešení (několik různých trojúhelníku splňuje zadání).